



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

## Ingeniería de estructuras

# L-61

## Placa plana circular de hormigón armado sujeta a carga uniformemente repartida

JOSEP JUAN ARIMANY

47845140B

Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

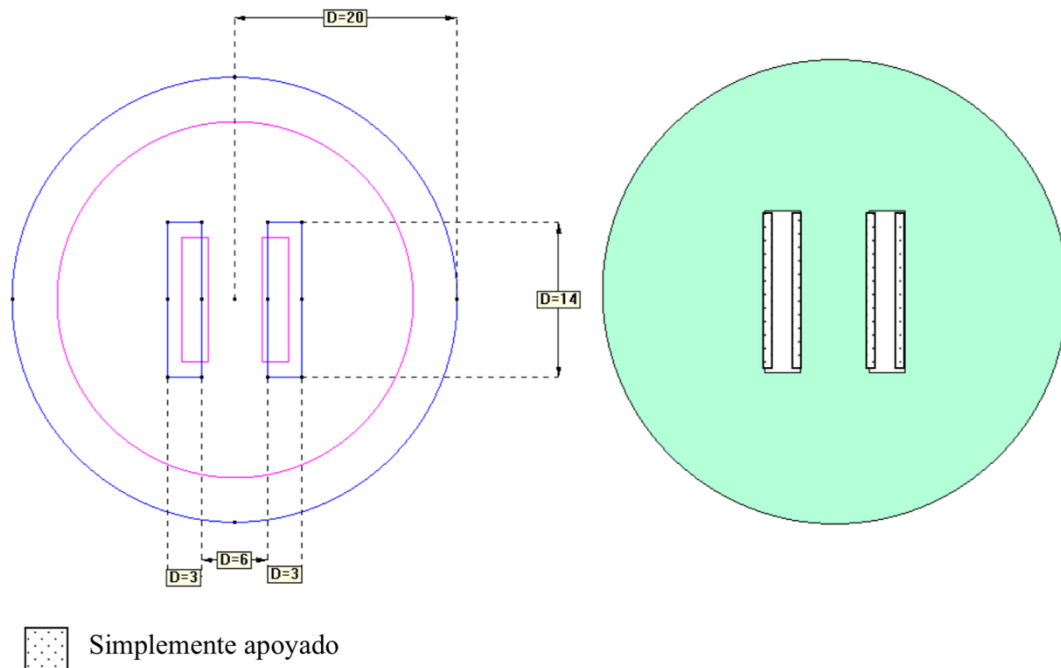
25/01/2019

# ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	3
2. PROBLEMA.....	5
3. ANÁLISI DE CONVERGENCIA.....	7
4. CÁLCULO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	8
5. CONCLUSIONES.....	10
6. REFERENCIAS.....	10

## 1. INTRODUCCIÓN

Se pretende estudiar el comportamiento de una placa plana circular de hormigón armado de 20 metros de radio y 0.35 metros de espesor que tiene dos apoyos en el centro. Se pide calcular la máxima carga repartida admisible bajo la restricción de que las tensiones de tracción no superen los 20 MPa y las de compresión los 12 MPa.



Primero se realizará un análisis de convergencia para determinar qué tipo de elemento es más idóneo para el problema y luego se realizarán diversas simulaciones para determinar la carga máxima admisible. Por último se presentará el estado tensional de la placa bajo la carga hallada.

Se ha considerado que la relación espesor/radio de la placa circular (0.0175) era suficientemente pequeña como para considerar la teoría de Kirchhoff para placas delgadas. Sin embargo, es importante destacar que la teoría de Reissner-Mindlin también podría ser aplicada, aunque la placa sea delgada si se utilizan las técnicas para solucionar el problema de bloqueo por cortante.

Se define como placa al sólido paralelepípedo en el que una de sus dimensiones (espesor) es mucho menor que las otras dos. La superficie plana equidistante de las caras de mayores dimensiones se denomina plano medio de la placa. El estado de placa se refiere al estado de cargas en el que solo actúan como cargas exteriores fuerzas normales al plano medio y momentos cuyos ejes están contenidos en dicho plano.

Las hipótesis de esta teoría son las siguientes:

1. En Los puntos del plano medio, los desplazamientos contenidos en dicho plano antes de la deformación, son nulos. Es equivalente a decir que solo se producen desplazamientos verticales ( $u = v = 0$ ).
2. Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical.
3. La tensión normal al plano medio  $\sigma_z$  es negligible.

4. Los puntos sobre las rectas normales al plano medio antes de la deformación, permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.

- Campo de desplazamientos:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T = \left[ w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T$$

w es la flecha de los puntos del plano medio y  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son los ángulos que definen el giro de la normal contenido en los planos XZ e YZ, respectivamente. El vector  $\mathbf{u}$  se denomina vector de desplazamientos de un punto del plano medio de la placa.

- Campo de deformaciones y tensiones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  los vectores de deformaciones y tensiones significativas, respectivamente. La matriz constitutiva D coincide con la de la teoría bidimensional de tensión plana (en la que una dimensión es mucho menor que las otras dos). Al tratarse de materiales isótropos, los coeficientes de la matriz constitutiva o de constantes elásticas se definen mediante el módulo de elasticidad (E) y el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Para facilitar el posterior desarrollo del PTV se definen los siguientes vectores de esfuerzos por flexión y deformaciones generalizadas. La utilidad de diferenciar esfuerzos por flexión y por cortante se aprecia mejor en la teoría de placas gruesas de Reissner-Mindlin en la que sí tendremos deformación por cortante y estos esfuerzos estarán presentes en la formulación del PTV.

- Relación tensión-deformación:

$$\hat{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = \hat{\mathbf{D}}_f \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = z \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_f; \hat{\mathbf{D}}_f = \frac{t^3}{12} \mathbf{D}$$

## 2. PROBLEMA

- Geometría:

Se ha definido la geometría en GiD como una sola superficie a partir de la intersección de un círculo de radio 20 m y dos rectángulos que representan los apoyos simples, donde no hay placa.

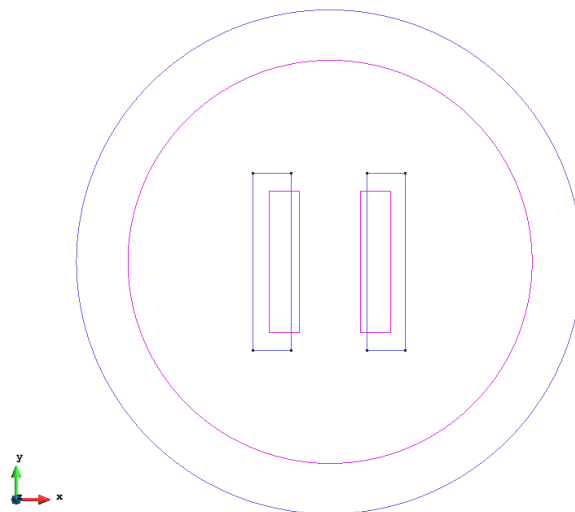


Figura 34. Geometría de la placa circular

Como se trata de un estudio de placas planas se utiliza el programa: RAMSERIES\_EDUCATIONAL\_2D → PLATES.

Este programa es independiente del tipo de placa, a la hora del mallado, en función del tipo de placa se seleccionará un tipo u otro de elemento para lograr obtener un buen resultado que converja y además optimice el proceso de obtención de la solución.

- Condiciones de contorno

Como se muestra en la figura del enunciado, existen dos apoyos de forma rectangular en medio de la placa, aunque no todos sus bordes tienen las mismas características. Concretamente cada apoyo tiene dos bordes simplemente apoyados y dos bordes libres.

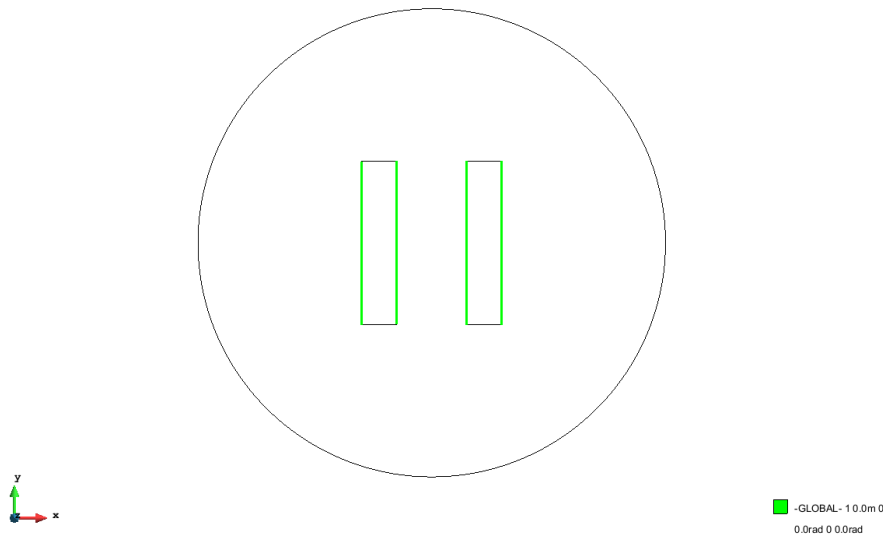


Figura 35. Condiciones de contorno de la placa

Los bordes simplemente apoyados son representados por las líneas verdes.

- Cargas:

Dado que el objetivo del ejercicio es calcular la carga máxima admisible para que no se generen tracciones y compresiones mayores de 20 MPa y 12 MPa, respectivamente, se debe imponer una carga inicial, que se establece en  $25000 \text{ N/m}^2$ . Esta carga se irá modificando y servirá para calibrar el modelo y ver cuál es la máxima admisible. Además, hay que considerar el efecto del propio peso de la placa.

- Propiedades de los materiales:

La placa está compuesta únicamente por hormigón convencional, del cual se muestran sus propiedades a continuación:

Material	Coefficiente de Poisson	Peso específico (N/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidad (GPa)
Hormigón	0.2	25000	30

### 3. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

Para saber qué tipos de elementos y tamaño de malla se ajusta mejor al problema, es necesario realizar un análisis de convergencia. Se han realizado diferentes mallas. Los tipos de elementos empleados han sido triángulos de tipo normal (3 nodos) y triángulos de tipo cuadrático (6 nodos).

El objetivo de este análisis que solo tiene en cuenta el peso propio es determinar qué tipo de elemento es más apropiado para este problema, para posteriormente, a partir de la discretización de la geometría con este tipo de elemento, determinar la carga repartida máxima admisible y discutir los resultados obtenidos de desplazamiento y tensiones.

- 3 nodos:

Tamaño	Elementos	Nodos	GL	Vmax
2	930	544	1600	0,4351
1	3066	1691	5013	0,4313
0,75	5354	2889	8587	0,4329
0,5	11600	6118	18238	0,4326
0,3	31344	16203	48417	0,4319

- 6 nodos:

Tamaño	Elementos	Nodos	GL	Vmax
4	298	677	1995	0,5758
2	930	2019	5997	0,6345
1,5	1468	3145	9359	0,65062
<b>1</b>	<b>3066</b>	<b>6449</b>	<b>19231</b>	<b>0,6622</b>
0,75	5354	11133	33243	0,6690

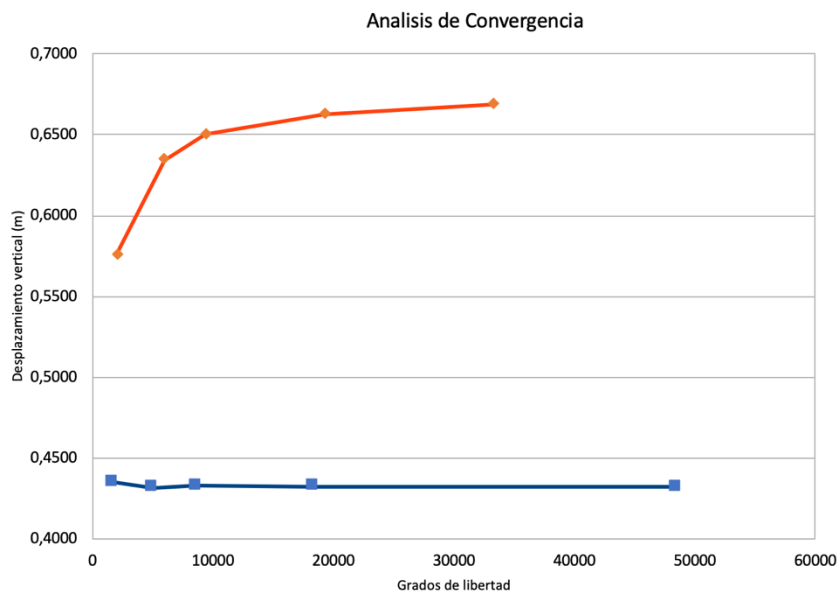


Figura 36. Análisis de convergencia

En la Figura 36 se puede observar el comportamiento de cada uno de los elementos empleados. La primera conclusión que se puede extraer del análisis de convergencia es que el elemento triangular de 3 nodos no proporciona unos buenos resultados ya que el desplazamiento vertical máximo al que converge es muy diferente a los valores obtenidos con el otro tipo de elementos. Además, reducir el tamaño de mallado no parece tener demasiada influencia en el valor del desplazamiento máximo alcanzado ya que a medida que se aumenta el número de nodos totales usados, el valor del desplazamiento máximo no cambia demasiado.

Por otro lado, el comportamiento del elemento triangular cuadrático convergen al mismo valor, y para obtener una buena relación entre óptimos resultados y coste computacional se opta por usar el elemento triangular cuadrático de tamaño 1 con 3066 elementos, 6449 nodos y 19231 grados de libertad para resolver nuestro problema.

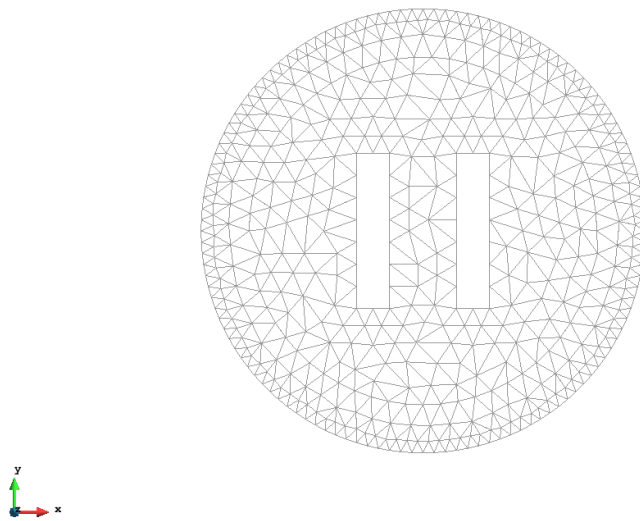


Figura 36. Ejemplo de mallado

#### 4. CÁLCULO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se procede a realizar cálculos de las tensiones principales para un elemento triangular cuadrático con una carga repartida inicial de  $25000 \text{ N/m}^2$ . El procedimiento consiste en calcular las tensiones para una carga repartida inicial y ver si se sobrepasan los límites de tracción y compresión (20 y 12 MPa). En caso que se sobrepasen, se deberá reducir la carga y comprobar los requerimientos otra vez, en caso negativo, se deberá aumentar la carga y ver si con la nueva carga se cumplen. El procedimiento es iterativo y termina cuando se halla un valor aproximado para la carga repartida lo más alto posible sin pasar los límites establecidos.

Carga repartida ( $\text{N/m}^2$ )	Tensión máxima de tracción (MPa)	Tensión máxima de compresión (MPa)
25000	10.8	13
<b>23600</b>	<b>9.9</b>	<b>11.9</b>
23500	9.8	11.8
23000	9.4	11.4
20000	7.4	9.03



La tabla muestra los resultados obtenidos del proceso iterativo seguido para encontrar la carga uniformemente repartida máxima admisible. Se aprecia como de las dos tensiones, la de compresión resulta ser la más restrictiva de las dos. Finalmente, la carga máxima admisible resulta ser de **23600 N/m<sup>2</sup>**.

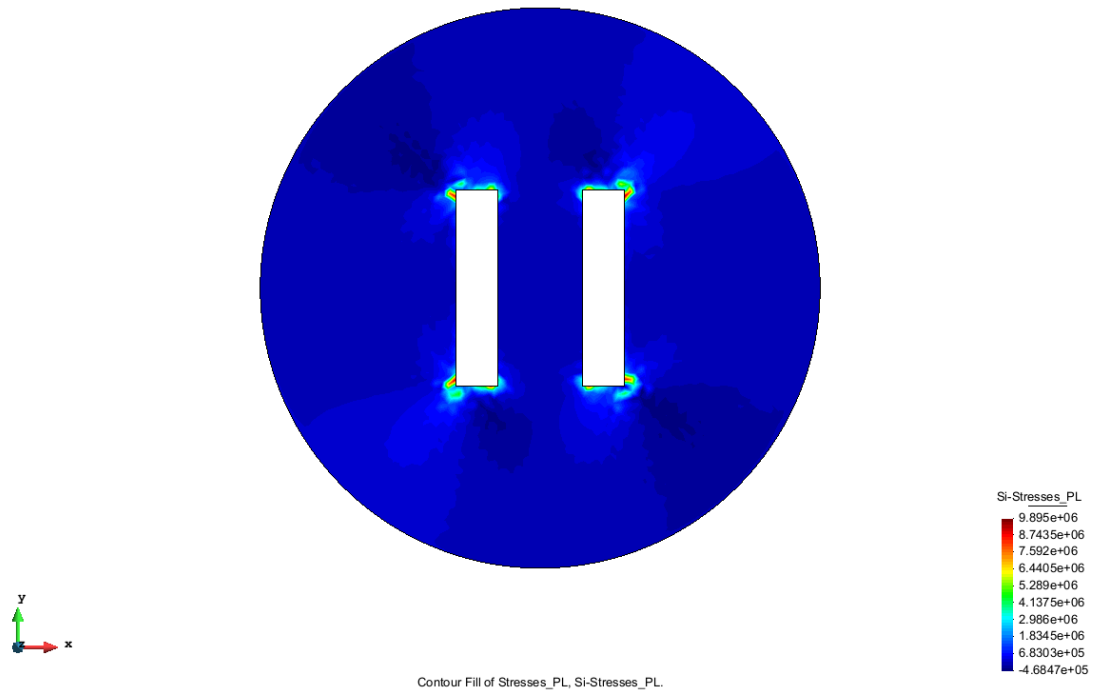


Figura 37. Tensiones Si

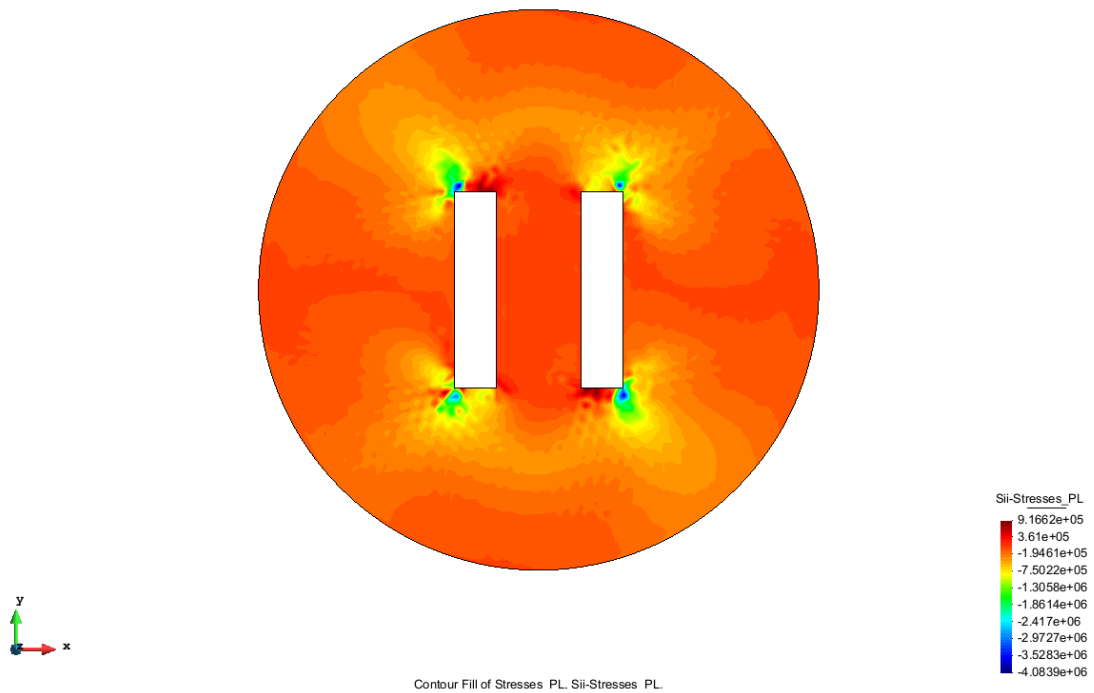


Figura 38. Tensiones Sii

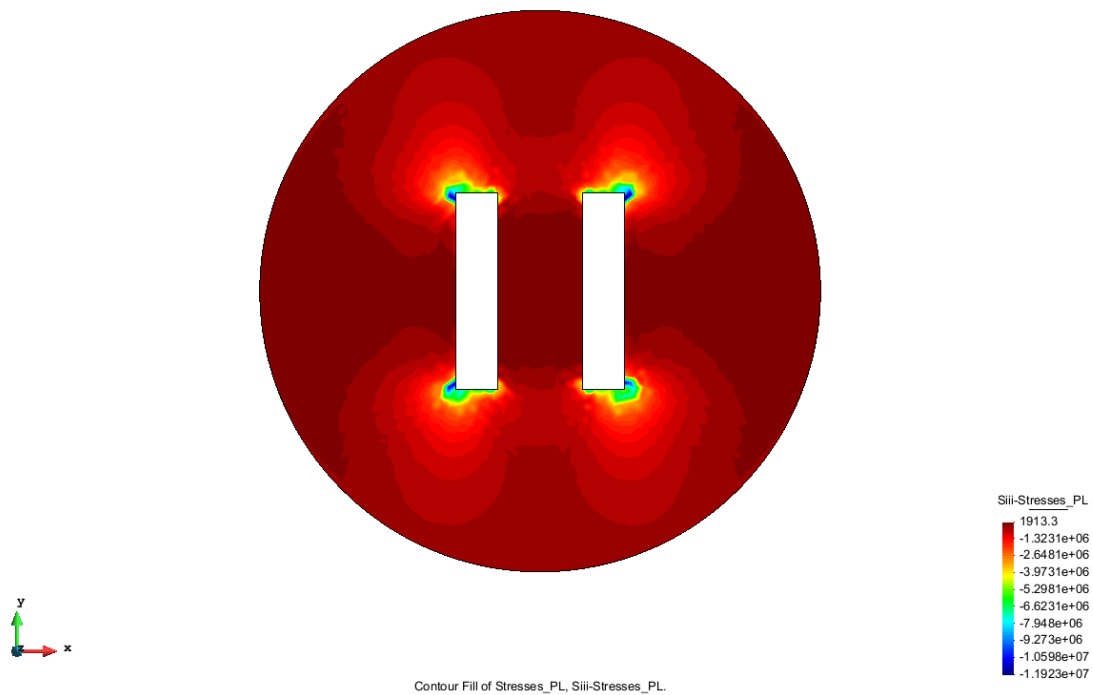


Figura 39. Tensiones Siii

Las tres figuras anteriores demuestran que, en ningún caso, se superan las tracciones o las compresiones máximas establecidas en el enunciado.

## 5. CONCLUSIONES

Se puede concluir que la gran parte de la placa trabaja a compresión, sin embargo, hay unas zonas alrededor de las esquinas exteriores de los apoyos donde hay una concentración de tensiones de tracción. Estos pocos puntos donde se desarrollan las tracciones son los que limitan la carga máxima admisible, aunque el resto de la placa pueda aguantar más carga.

Esto es importante en cuanto al diseño de la placa ya que son las zonas más propensas a conducir a un colapso de la placa si no se comprueba adecuadamente la resistencia a tracción del hormigón, que es bastante menor que a compresión.

## 6. REFERENCIAS

Apuntes del curso de “Ingeniería de Estructuras” del “Máster en Ingeniería de Caminos, Canales y Puentes” (Universitat Politècnica de Catalunya, primer cuatrimestre del curso 2018-19).