

# L-23 TORRE DE ENFRIAMIENTO DE HORMIGÓN ARMADO

---

INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS

Carlos Gomáriz Gayá

# ÍNDICE

1. ENUNCIADO	2
2. INTRODUCCIÓN	3
3. IMPLEMENTACIÓN EN EL PROGRAMA	4
4. SOLUCIÓN	11
5. CÁLCULO DEL ESPESOR MÍNIMO	12
6. CONCLUSIONES	15

# 1. ENUNCIADO

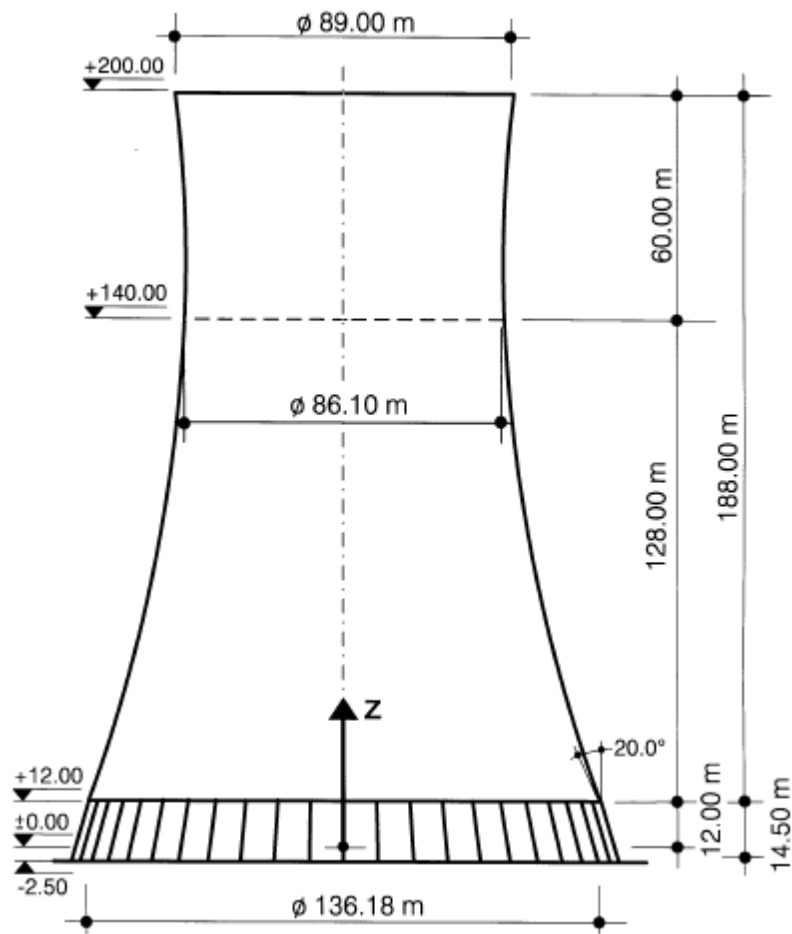
La figura representa una torre de enfriamiento formada por una lámina de hormigón armado. Calcular el espesor mínimo de la torre capaz de soportar cuatro veces el peso propio de la estructura con las restricciones que se indican.

- 1) Las tracciones máximas en cualquier punto de la estructura no deben superar los 30 MPa
- 2) Las compresiones máximas en cualquier punto de la estructura no deben superar los 45 MPa
- 3) Ambos extremos del puente se encuentra simplemente apoyado
- 4) Las propiedades mecánicas del hormigón son:  $E = 19.8 \text{ KN/mm}^2$   $\nu = 0.18$
- 5) El apoyo proporcionado por las columnas se puede suponer como empotrado.

Cargas actuantes:

- a) Peso propio

Las dimensiones de la torre en m:



## 2. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es el de realizar un análisis tensional del depósito descrito anteriormente sometido a una carga de 4 veces su peso propio. Una vez hecho esto, debemos comprobar si se superan las restricciones de tracciones y compresiones en toda la estructura. Después, se variará el espesor de la lámina para determinar el espesor mínimo que podría tener la lámina para que se cumplan las restricciones anteriores.

Debido a que su geometría es de revolución, y sus paredes pueden ser consideradas como láminas debido a su pequeño espesor en relación a las demás dimensiones, estamos claramente frente a un caso donde se puede utilizar la simplificación de lámina de revolución.

Además, debemos comprobar que se cumplen las hipótesis necesarias para considerar el problema como uno de revolución. En este caso, la única fuerza actuante es el peso propio, que tiene simetría de revolución, y se supondrá que el espesor de la lámina no cambia al deformarse la estructura. Con estas dos hipótesis simplificamos enormemente el problema, ya que reduce nuestro estudio a la deformación de la línea generatriz.

Otras dos hipótesis fundamentales que debemos realizar para aplicar el modelo de lámina de revolución es considerar que la tensión en la dirección normal a la generatriz es nula, es decir, que estamos frente a un problema de tensión plana y que las normales a la generatriz antes de la deformación permanecen rectas, pero no necesariamente normales a la generatriz después de la deformación (hipótesis de deformación por cortante).

Una vez ya conocemos el modelo que utilizaremos vamos a describir su campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones en los que se basará todo su cálculo.

Campo de desplazamientos en ejes locales:

$$\mathbf{u}' = [u'_0, w'_0, \theta]^T$$

Las deformaciones se definen por tres componentes: una deformación en el eje radial, que se completa con una deformación circunferencial que tiene en cuenta la variación relativa de longitud de las circunferencias. Además, hay también una deformación tangencial. El resto de componentes de deformaciones son nulos:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{x'} \\ \varepsilon_{\varphi} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{w_0}{R} \\ u'_0 \cos\phi - w'_0 \operatorname{sen}\phi \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z' \frac{\partial \theta}{\partial s} \\ -z' \frac{\theta \cos\phi}{x} \\ \frac{\partial w'_0}{\partial s} + \frac{u'_0}{R} - \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{m'} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z' \varepsilon'_{f'} \\ \varepsilon'_{c'} \end{Bmatrix}$$

Con lo que también queda definida la expresión del vector de deformaciones generalizadas. Por último la expresión de las tensiones y las tensiones generalizadas (esfuerzos) se expresan de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{\varphi} \\ \tau_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_{m'} \\ \sigma'_{c'} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'$$

$$\hat{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}'_m \\ \hat{\sigma}'_f \\ \hat{\sigma}'_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{\varphi} \\ M_{x'} \\ M_{\varphi} \\ Q_{z'} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma'_m \\ z' \sigma'_m \\ \sigma'_c \end{Bmatrix} dz'$$

Con la teoría a utilizar definida ya se puede proceder a insertar los datos al programa de cálculo.

### 3. IMPLEMENTACIÓN EN EL PROGRAMA

#### 3.1 Definición de la geometría

Una vez definido con detalle el problema que vamos a tratar, vamos a resolverlo mediante el software “RAMSERIES” y su programa de láminas de revolución. En primer lugar lo que haremos será definir la geometría de la estructura. En este caso, al ser un sólido de revolución bastará con definir la geometría de un corte meridional de la misma.

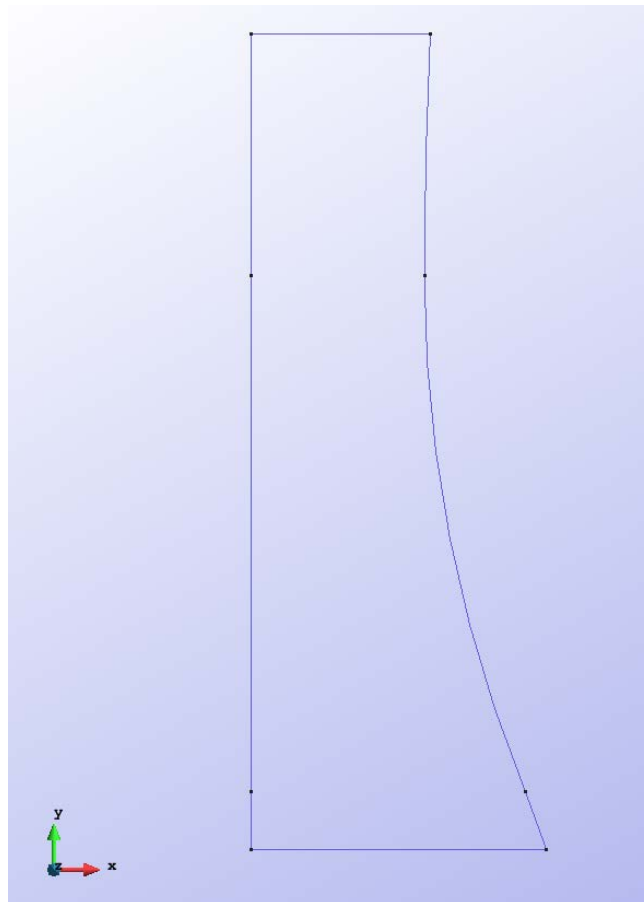


Figura 1. Definición de la geometría de la estructura a través de un corte meridional

A continuación se ha revolucionado la superficie anterior entorno al eje “y” para tal de conferirle la estructura de revolución que requiere.

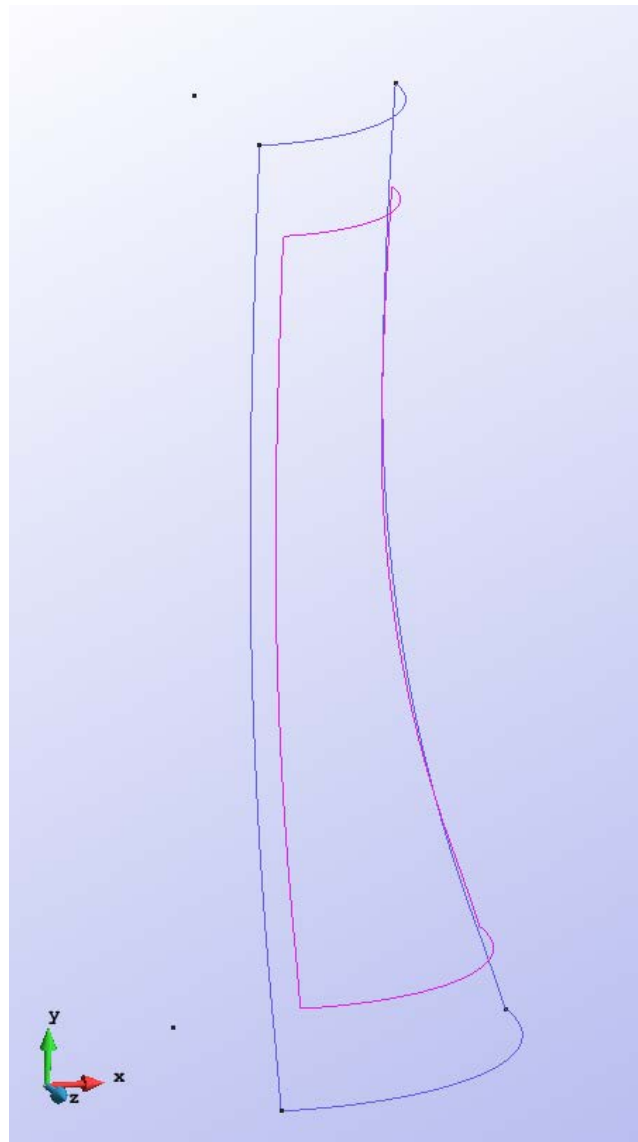


Figura 2. Sección meridional revolucionada a un cuarto de vuelta (90 grados)

### 3.2 Condiciones de Contorno

Una vez hemos definido totalmente nuestra geometría procedemos a aplicar las condiciones de contorno de nuestra estructura. Se ha considerado la base empotrada, por lo que los tres movimientos y los giros en ella serán nulos. También se ha fijado en el contorno izquierdo (plano meridional ‘yz’) el desplazamiento horizontal (x) y el giro en sentido del eje vertical ‘y’ y del eje ‘z’, cuyas condiciones corresponden a la simetría de revolución. Por último, en el contorno del plano meridional ‘xy’ se han restringido el movimiento horizontal (en dirección ‘z’) y el giro respecto al eje de revolución ‘y’ y del eje ‘x’. En la figura que se presenta a continuación se puede apreciar la asignación de dichas condiciones en sus correspondientes contornos:



Figura 3. Aplicación de las condiciones de contorno a la estructura

### 3.3 Material y carga

A continuación, debemos definir el material del que estará hecha nuestra estructura. Como bien dice el enunciado, nos encontramos con una lámina de hormigón armado, cuyas características son las siguientes:

$$E = 19.8 \text{ kN/mm}^2$$

$$\nu = 0.18$$

$$\varphi_{\text{hormigón armado}} = 25 \text{ kN/m}^3$$

Cabe destacar que en nuestra estructura no habrá ninguna carga exterior aplicada, con lo que solo deberemos tener en cuenta el efecto de su peso propio. Sin embargo, se pide la condición de que la estructura pueda soportar una carga igual a cuatro veces el peso propio, por lo que se ha multiplicado el peso específico del material por cuatro para tener en cuenta ese efecto.

También debe definirse el espesor del material, que es la incógnita de nuestro problema, por lo que se ha escogido un valor de 0.3 m como valor arbitrario para realizar un primer tanteo de la solución. Además, dicha solución nos servirá para hacer un análisis de convergencia con las distintas mallas que utilizaremos para discretizar el dominio de la torre.

### 3.4 Cálculo y refinamiento de malla

Con todos los parámetros fijados anteriormente se ha hecho un cálculo de la solución utilizando una malla de elementos triangulares de tres nodos con un tamaño de elemento de 4 metros. La solución que mostraremos es la de los desplazamientos en el eje vertical “y” ya que son los que mejor describen el comportamiento de la estructura sometida a gravedad. El resultado obtenido ha sido el siguiente:

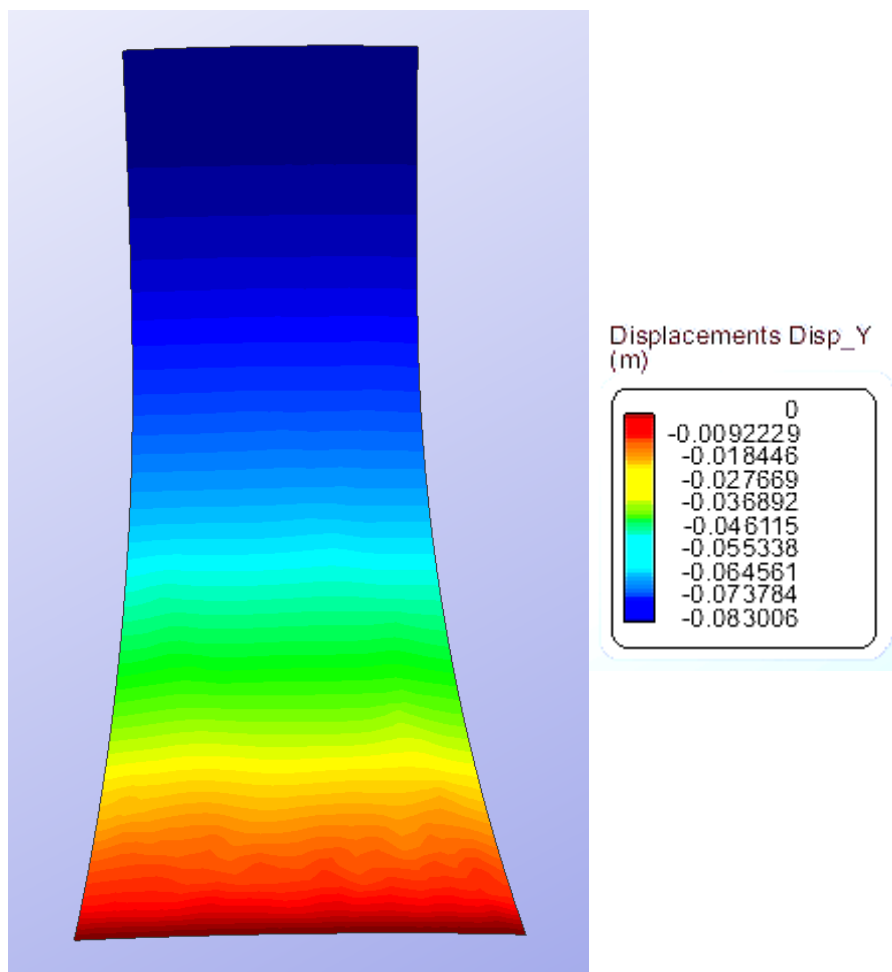


Figura 4. Desplazamientos verticales obtenidos con una malla de elementos triangulares de tres nodos de tamaño 4 metros.

A continuación utilizaremos mallas triangulares de 3 nodos y 6 nodos y mallas de cuadriláteros de 4 y 8 nodos. Se realizará también un análisis de convergencia para las tensiones (compresiones y tracciones) tanto en la cara superior como inferior de la lámina, además de los desplazamientos



verticales. Los resultados que hemos obtenido mediante el refinamiento de cada una de las mallas ha sido el siguiente:

#### TRIÁNGULO DE TRES NODOS

Tamaño	Nodos	Grados Libertad	Flecha	Cara Superior		Cara Inferior	
				Compresión (Siii)	Tracción (Si)	Compresión (Siii)	Tracción (Si)
4	1472	8832	8.30E-02	2.12E+07	3.44E+05	1.79E+07	1.32E+06
3	2432	14592	8.30E-02	2.11E+07	3.58E+05	1.72E+07	9.19E+05
2	5076	30456	8.29E-02	2.18E+07	2.45E+05	1.65E+07	2.42E+05
1	18697	112182	8.28E-02	2.11E+07	2.24E+05	1.61E+07	2.20E+05
0.5	71264	427584	8.28E-02	2.07E+07	2.16E+05	1.59E+07	2.16E+05

#### TRIÁNGULO DE SEIS NODOS

Tamaño	Nodos	Grados Libertad	Flecha	Cara Superior		Cara Inferior	
				Compresión (Siii)	Tracción (Si)	Compresión (Siii)	Tracción (Si)
4	5611	33666	8.31E-02	1.99E+07	3.06E+05	1.68E+07	3.16E+05
3	9357	56142	8.29E-02	2.04E+07	2.64E+05	1.62E+07	2.56E+05
2	19746	118476	8.29E-02	2.12E+07	2.32E+05	1.62E+07	2.31E+05
1	73669	442014	8.28E-02	2.07E+07	2.19E+05	1.60E+07	2.20E+05

#### CUADRILÁTERO DE CUATRO NODOS

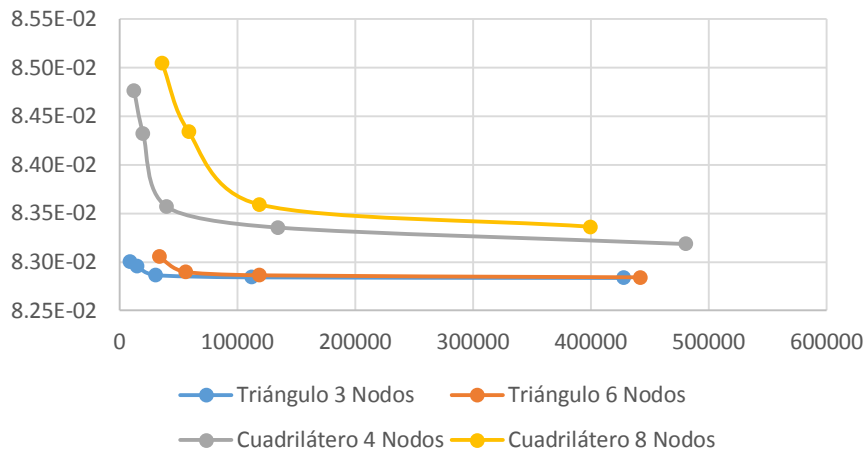
Tamaño	Nodos	Grados Libertad	Flecha	Cara Superior		Cara Inferior	
				Compresión (Siii)	Tracción (Si)	Compresión (Siii)	Tracción (Si)
4	2049	12294	8.48E-02	1.89E+07	7.12E+05	1.73E+07	1.47E+06
3	3316	19896	8.43E-02	2.00E+07	5.50E+05	1.69E+07	8.21E+05
2	6677	40062	8.36E-02	2.00E+07	4.66E+05	1.74E+07	7.94E+05
1	22387	134322	8.34E-02	2.08E+07	3.04E+05	1.68E+07	3.59E+05
0.5	80055	480330	8.32E-02	2.06E+07	2.68E+05	1.64E+07	2.68E+05

#### CUADRILÁTERO DE OCHO NODOS

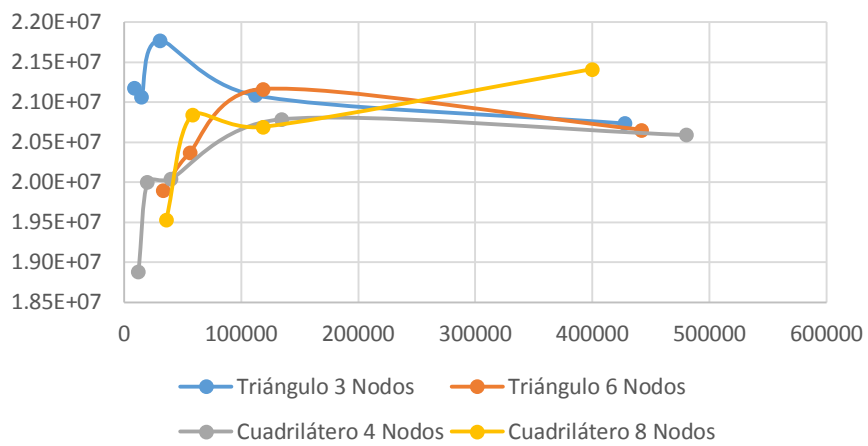
Tamaño	Nodos	Grados Libertad	Flecha	Cara Superior		Cara Inferior	
				Compresión (Siii)	Tracción (Si)	Compresión (Siii)	Tracción (Si)
4	6008	36048	8.50E-02	1.95E+07	8.98E+05	1.82E+07	1.30E+06
3	9762	58572	8.43E-02	2.08E+07	6.52E+05	1.75E+07	8.56E+05
2	19751	118506	8.36E-02	2.07E+07	5.97E+05	1.78E+07	8.22E+05
1	66601	399606	8.34E-02	2.14E+07	3.11E+05	1.70E+07	6.66E+05

Los resultados anteriores pueden interpretarse mucho mejor gráficamente:

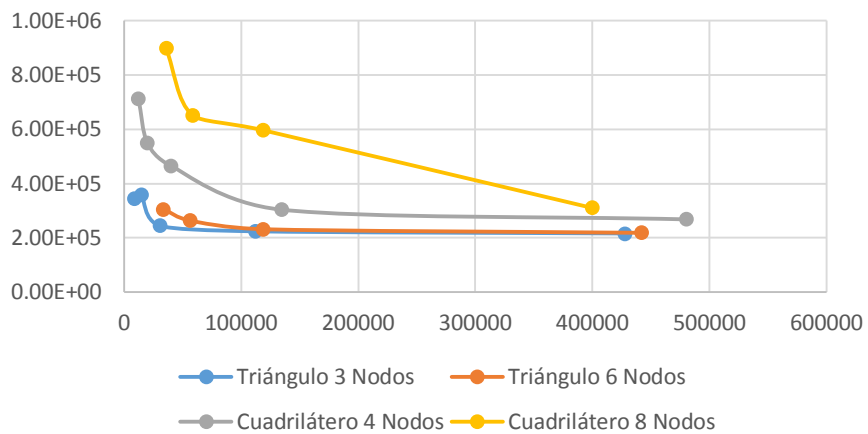
### CONVERGENCIA DESPLAZAMIENTOS



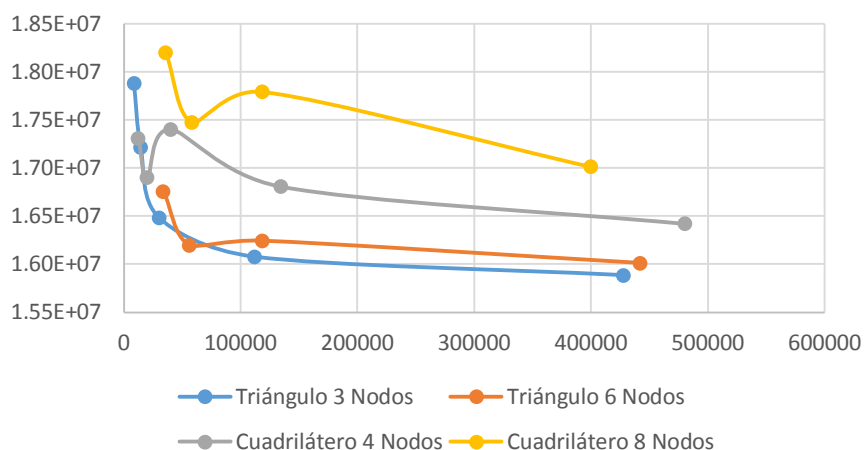
### CONVERGENCIA COMPRESIÓN SUPERIOR



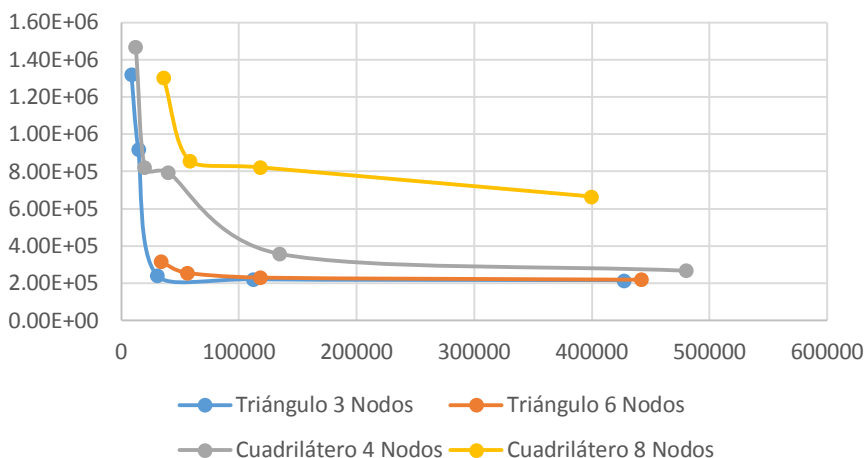
### CONVERGENCIA TRACCIONES SUPERIOR



## CONVERGENCIA COMPRESIONES INFERIOR



## CONVERGENCIA TRACCIONES INFERIOR



Como bien ilustran estos gráficos, los elementos triangulares son los que mejor convergencia presentan en todos los casos, por lo que descartaremos de primeras los elementos cuadriláteros. Ahora bien, de entre los elementos triangulares, en algunos casos converge ligeramente mejor el triángulo de tres nodos y en otros casos el triángulo de seis nodos. Por su simplicidad y su versatilidad de uso, utilizaremos el elemento triangular de tres nodos para realizar los cálculos de nuestro problema. Se ha visto que con un elemento de tamaño 1 metro (18600 nodos) tenemos una buena convergencia y un coste computacional realmente bajo, así que será la malla que definitivamente escogeremos.

## 4. SOLUCIÓN

Una vez seleccionada la malla que vamos a utilizar, procedemos al cálculo mediante el software "GID". Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

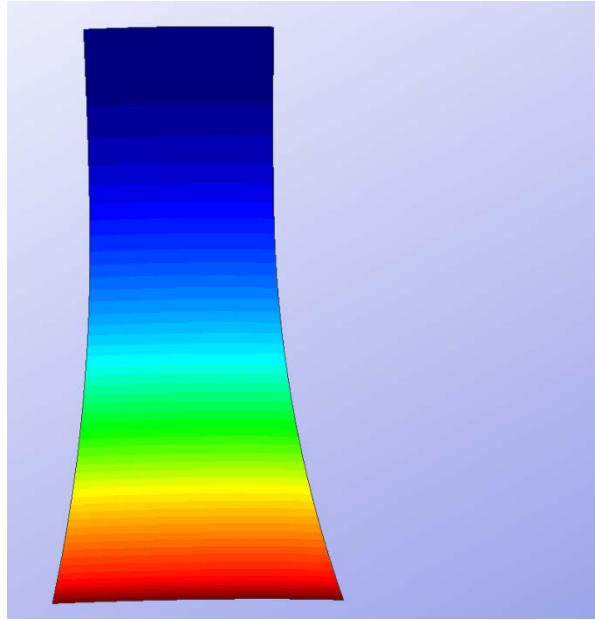
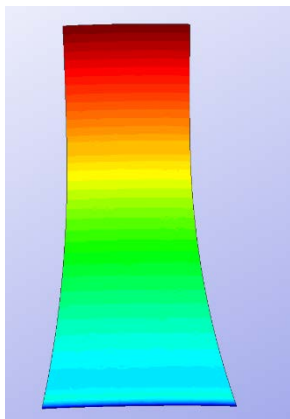


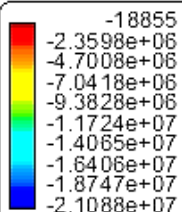
Figura 5. Distribución de desplazamientos verticales en la estructura

Como era de esperar, los puntos que mayor movimiento tienen son los de la parte superior de la estructura, ya que aunque son los que menos deformación tienen, son los que acumulan todos los movimientos relativos a los demás puntos inferiores que sí que deforman bastante. Cabe destacar también que el orden de los desplazamientos es bastante pequeño (8cm) comparado con el gran tamaño que posee la estructura (200m), lo cual es muy satisfactorio. A continuación se evalúan las tracciones y compresiones que sufre la estructura, tanto en la cara superior como inferior de la lámina, ya que son los parámetros que deben cumplir los requerimientos de diseño.

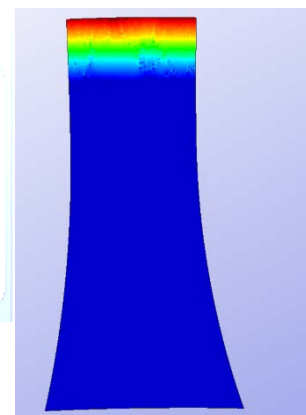
### Compresiones Superiores



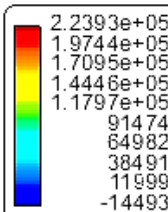
...es\_Top#SI11 (Pa)



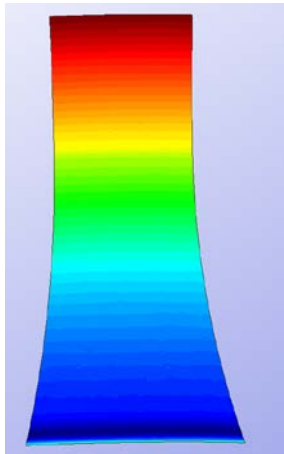
### Tracciones Superiores



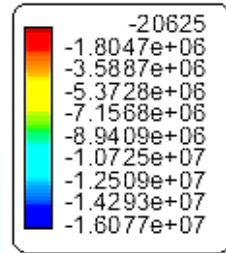
...sses\_Top#SI (Pa)



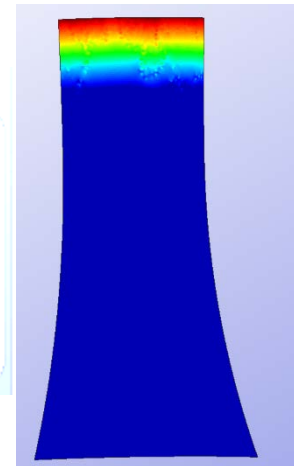
### Compresiones Inferiores



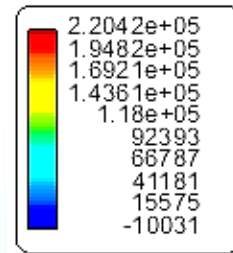
...Bottom//SIII (Pa)



### Tracciones Inferiores



...s\_Bottom//SI (Pa)



Como puede verse en las figuras anteriores, las tracciones y las tensiones son ligeramente más elevadas en la cara superior de la lámina, pero no es un hecho determinante ya que son del mismo orden de magnitud. Por otra parte debemos señalar que los valores de las compresiones son del orden de 20 MPa, valor que se acerca al valor máximo establecido (45 MPa), al contrario que tracciones, que tenemos unos valores de unos 0.2 MPa, que se encuentra muy lejos del límite establecido de diseño (30 MPa).

Así pues, el último ejercicio que realizaremos es el de variar el espesor de la lámina (reducirlo) con tal de que se puedan garantizar las condiciones establecidas en tensiones. El último fin de esta parte será la de buscar el espesor mínimo que cumpla los requerimientos, ya que será el que nos pueda suponer un mayor ahorro en material de construcción.

## 5. CÁLCULO DEL ESPESOR MÍNIMO

Como se ha dicho anteriormente, calcularemos el espesor mínimo de nuestra lámina a través de un proceso iterativo. Se ha empezado con el valor de 30cm que es el caso que hemos estudiado anteriormente y se irá reduciendo progresivamente y comprobando si cumple las solicitaciones impuestas. En la siguiente tabla se pueden ver los resultados obtenidos tras realizar dicho proceso:

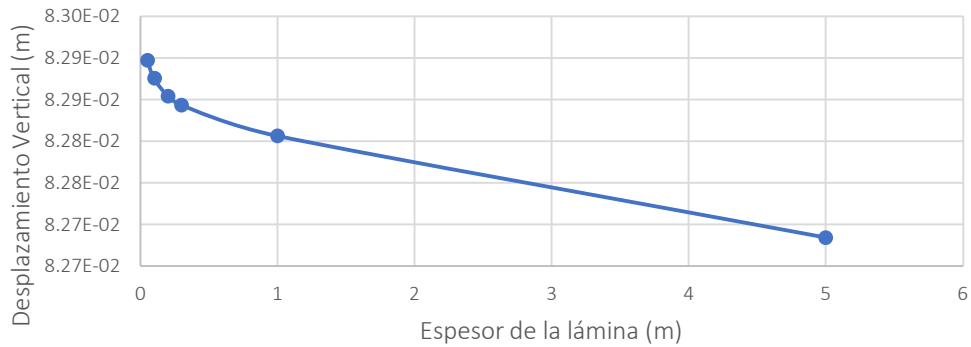
TRIÁNGULO DE TRES NODOS

Espesor	Flecha	Top		Bottom	
		Compresión (Siii)	Tracción (Si)	Compresión (Siii)	Tracción (Si)
5	8.27E-02	2.07E+07	2.15E+05	1.53E+07	2.27E+05
1	8.28E-02	2.08E+07	2.15E+05	1.57E+07	2.16E+05
0.3	8.28E-02	2.11E+07	2.24E+05	1.61E+07	2.20E+05
0.2	8.29E-02	2.13E+07	2.28E+05	1.62E+07	2.24E+05
0.1	8.29E-02	2.16E+07	2.40E+05	1.66E+07	2.38E+05

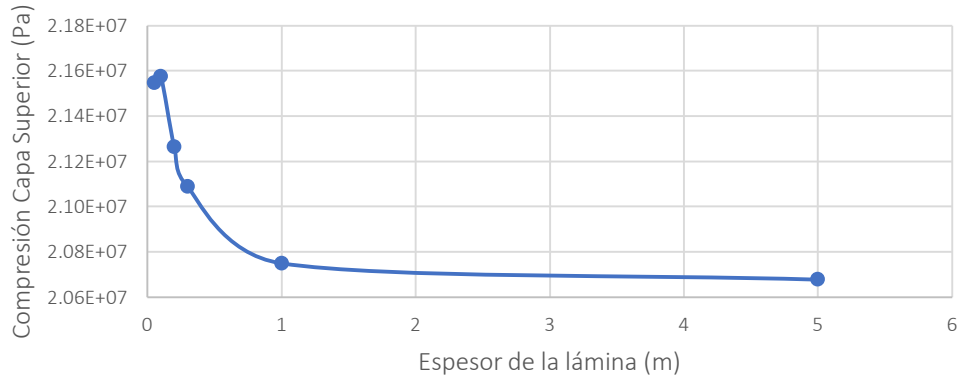
0.05	8.29E-02	2.15E+07	2.59E+05	1.70E+07	3.64E+05
Valor Límite	-	4.50E+07	3.00E+07	4.50E+07	3.00E+07

Como bien puede apreciarse en la tabla anterior, los valores de las tensiones al aumentar o disminuir el espesor de la estructura varían muy poco, nunca acercándose a los valores máximos permitidos. A continuación podemos ver de forma gráfica la evolución de los desplazamientos y tensiones al aumentar y disminuir el espesor del hormigón:

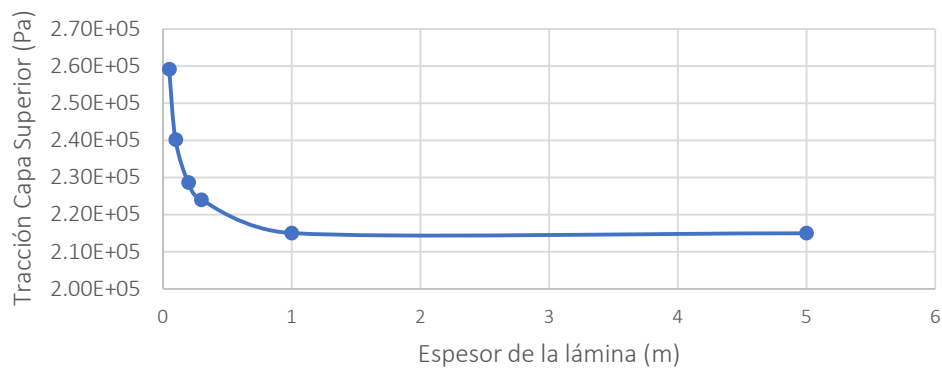
### VARIACIÓN DE LA FLECHA



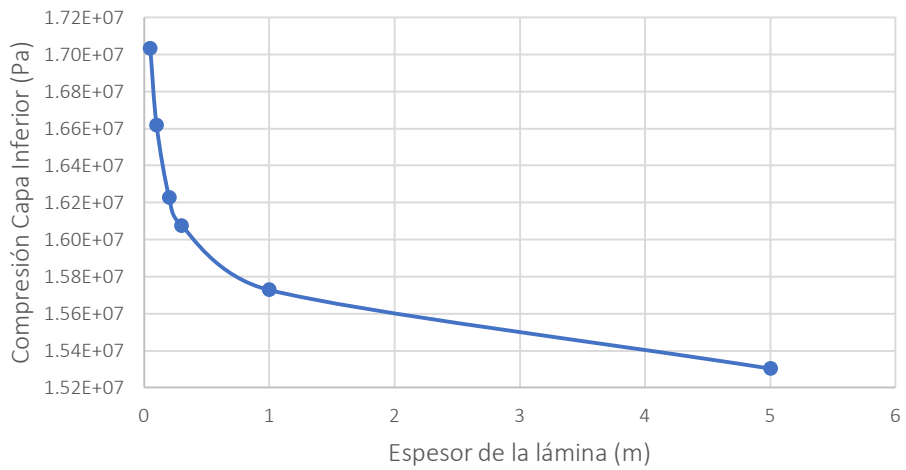
### VARIACIÓN DE COMPRESIÓN SUPERIOR



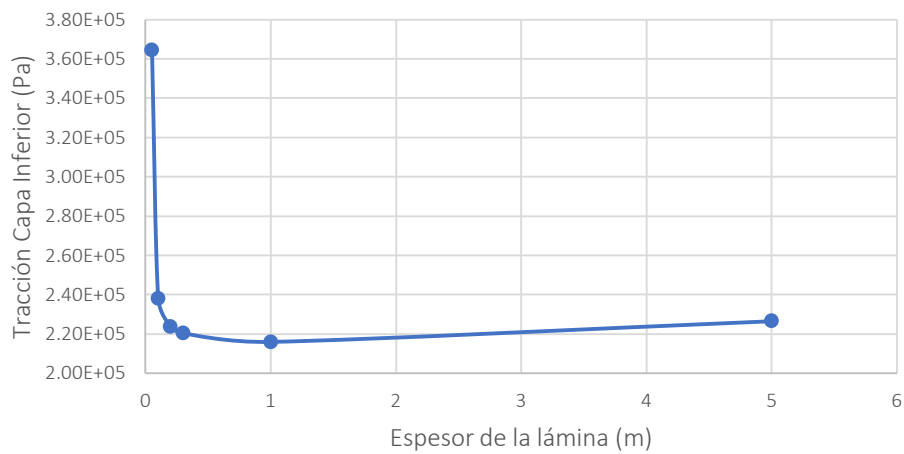
### VARIACIÓN DE TRACCIÓN SUPERIOR



### VARIACIÓN DE COMPRESIÓN INFERIOR



### VARIACIÓN DE TRACCIÓN INFERIOR



Una vez observados los gráficos, vemos que al aumentar el espesor del material las tracciones, compresiones y desplazamientos disminuyen, al contrario que cuando lo aumentamos, que aumentan todos ellos. Ahora bien, este aumento es tan pequeño que nos permite afirmar, finalmente que la carga de peso propio, incluso aumentada 4 veces, no es un factor determinante en el cálculo del espesor de nuestra estructura.

## 6. CONCLUSIONES

Después de realizar este segundo problema, y observando los resultados obtenidos, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

Observando los resultados gráficos de los apartados anteriores, se concluye que frente a efectos del peso propio, las compresiones máximas se generan en puntos próximos al apoyo de la base, mientras que las máximas tracciones se dan en el punto superior.

El peso propio no es un factor determinante a la hora de dimensionar el espesor de esta estructura, ya que aunque las compresiones son del orden de magnitud de las solicitaciones, tanto ellas como las tracciones no aumentan significativamente al variar el espesor del material.