Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Nombre del estudiante: Rosa Eva González

Materia: Computational Structural Mechanics and Dynamics

Fecha de entrega: 5/03/2018

Descripción: Deber 4

1. Compute the entries of $\mathbf{K}^e$ for the following axisymmetric triangle:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = r_3 = a, \quad z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = b$$

The material is isotropic with $\nu = 0$ for which the stress-strain matrix is,

$$\boldsymbol{E} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Datos:

$r1 := 0 \qquad r2 := a \qquad r3 := a$

$z1 := 0 \qquad z2 := 0 \qquad z3 := b$

Area:

$$A := \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r1 & r2 & r3 \\ z1 & z2 & z3 \end{pmatrix} \right| \rightarrow \frac{a \cdot b}{2}$$

Matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{4A^2} \int_{\Omega^e} r \begin{bmatrix} z_{23} & 0 & z_{31} & 0 & z_{12} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 & r_{13} & 0 & r_{21} \\ 2A\,\zeta_1/r & 0 & 2A\,\zeta_2/r & 0 & 2A\,\zeta_3/r & 0 \\ r_{32} & z_{23} & r_{13} & z_{31} & r_{21} & z_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 0 \\ E_{14} & E_{24} & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{23} & 0 & z_{31} & 0 & z_{12} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 & r_{13} & 0 & r_{21} \\ 2A\,\zeta_1/r & 0 & 2A\,\zeta_2/r & 0 & 2A\,\zeta_3/r & 0 \\ r_{32} & z_{23} & r_{13} & z_{31} & r_{21} & z_{12} \end{bmatrix} d\Omega.$$

$$Ke := \frac{1}{4\cdot A^2}\cdot\int r\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix}^T \left[E\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix} d\Omega$$

Reemplazando datos:

$$Ke := \frac{1}{4\cdot A^2}\cdot\int r\cdot\begin{pmatrix} -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a \\ \frac{a\cdot b\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{a\cdot b\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{a\cdot b\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ 0 & -b & -a & b & a & 0 \end{pmatrix}^T \cdot\left(\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2} \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a \\ \frac{a\cdot b\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{a\cdot b\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{a\cdot b\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ 0 & -b & -a & b & a & 0 \end{pmatrix} d\Omega$$

Valor de r:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r1 & r2 & r3 \\ z1 & z2 & z3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \zeta1 \\ \zeta2 \\ \zeta3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \zeta1+\zeta2+\zeta3 \\ r1\cdot\zeta1+r2\cdot\zeta2+r3\cdot\zeta3 \\ \zeta1\cdot z1+\zeta2\cdot z2+\zeta3\cdot z3 \end{pmatrix}$$

Regla de Gauss de punto intermedio:

$$\frac{1}{A}\int_{\Omega^e} F(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\, d\Omega \approx \tfrac{1}{3}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0)+\tfrac{1}{3}F(0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{3}F(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}).$$

Calculo de $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$$\begin{pmatrix} \zeta1 \\ \zeta2 \\ \zeta3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r := r1\cdot\zeta1+r2\cdot\zeta2+r3\cdot\zeta3 \rightarrow \frac{a}{2}$$

$$E1 := E\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$r\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix}^{T}\cdot E1\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E\cdot a\cdot b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a^3}{4}+E\cdot a\cdot b^2 & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a^3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a^3}{2}+\frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a^3}{2} \\ 0 & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a^3}{4} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a^3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E\cdot a^3}{2} & 0 & \frac{E\cdot a^3}{2} \end{pmatrix}$$

Calculo de $F\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{pmatrix}\zeta1\\ \zeta2\\ \zeta3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$r := r1\cdot\zeta1 + r2\cdot\zeta2 + r3\cdot\zeta3 \rightarrow a$$

$$r\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix}^{T}\cdot E1\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E\cdot a\cdot b^2 & 0 & -E\cdot a\cdot b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & 0 \\ -E\cdot a\cdot b^2 & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & \frac{E\cdot a^3}{2}+\frac{5\cdot E\cdot a\cdot b^2}{4} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{4}-\frac{E\cdot a^3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & E\cdot a^3+\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & -E\cdot a^3 \\ 0 & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{4}-\frac{E\cdot a^3}{2} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{2} & \frac{E\cdot a^3}{2}+\frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E\cdot a^3 & 0 & E\cdot a^3 \end{pmatrix}$$

Calculo de $F\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{pmatrix}\zeta1\\ \zeta2\\ \zeta3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$r := r1\cdot\zeta1 + r2\cdot\zeta2 + r3\cdot\zeta3 \rightarrow \frac{a}{2}$$

$$r\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix}^{T}\cdot E1\cdot\begin{pmatrix} z2-z3 & 0 & z3-z1 & 0 & z1-z2 & 0 \\ 0 & r3-r2 & 0 & r1-r3 & 0 & r2-r1 \\ \frac{2\cdot A\cdot\zeta1}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta2}{r} & 0 & \frac{2\cdot A\cdot\zeta3}{r} & 0 \\ r3-r2 & z2-z3 & r1-r3 & z3-z1 & r2-r1 & z1-z2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E\cdot a\cdot b^2 & 0 & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & 0 & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & 0 \\ -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a^3}{4}+\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a^3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a^3}{2}+\frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a^3}{2} \\ \frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & -\frac{E\cdot a^3}{4} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a^3}{4}+\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E\cdot a^3}{2} & 0 & \frac{E\cdot a^3}{2} \end{pmatrix}$$

Sumatoria de $\frac{1}{3} * F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) + \frac{1}{3} * F\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} * F\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{pmatrix} E\cdot a\cdot b^2 & 0 & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & 0 & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{3} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{3} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & 0 \\ -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{2} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & \frac{E\cdot a^3}{3} + \frac{11\cdot E\cdot a\cdot b^2}{12} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{12} - \frac{E\cdot a^3}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{E\cdot a\cdot b^2}{3} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & \frac{2\cdot E\cdot a^3}{3} + \frac{E\cdot a\cdot b^2}{3} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & -\frac{2\cdot E\cdot a^3}{3} \\ \frac{E\cdot a\cdot b^2}{6} & -\frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & \frac{E\cdot a\cdot b^2}{12} - \frac{E\cdot a^3}{3} & \frac{E\cdot a^2\cdot b}{3} & \frac{E\cdot a^3}{3} + \frac{E\cdot a\cdot b^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\cdot E\cdot a^3}{3} & 0 & \frac{2\cdot E\cdot a^3}{3} \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez:

Reemplazando $\left(\frac{1}{3} * F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) + \frac{1}{3} * F\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} * F\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{A} * \int_\Omega F(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ en K.

$$K := \frac{1}{4\cdot A}\cdot \text{mid} \rightarrow \ \text{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E\cdot b}{2} & 0 & -\frac{E\cdot b}{4} & 0 & \frac{E\cdot b}{12} & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot b}{6} & \frac{E\cdot a}{6} & -\frac{E\cdot b}{6} & -\frac{E\cdot a}{6} & 0 \\ -\frac{E\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(4\cdot a^2 + 11\cdot b^2)}{24\cdot b} & -\frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(b^2 - 4\cdot a^2)}{24\cdot b} & 0 \\ 0 & -\frac{E\cdot b}{6} & -\frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(2\cdot a^2 + b^2)}{6\cdot b} & \frac{E\cdot a}{6} & -\frac{E\cdot a^2}{3\cdot b} \\ \frac{E\cdot b}{12} & -\frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(b^2 - 4\cdot a^2)}{24\cdot b} & \frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(4\cdot a^2 + 3\cdot b^2)}{24\cdot b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E\cdot a^2}{3\cdot b} & 0 & \frac{E\cdot a^2}{3\cdot b} \end{bmatrix}$$

2. Show that the sum of the rows (and columns) 2, 4 and 6 of $\mathbf{K}_e$ must vanish and explain why. Show as well that the sum of rows (and columns) 1, 3 and 5 does not vanish, and explain why.

$$K := \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} K^{\langle 0\rangle} & K^{\langle 1\rangle} & K^{\langle 2\rangle} & K^{\langle 3\rangle} & K^{\langle 4\rangle} & K^{\langle 5\rangle} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{E\cdot b}{2} & 0 & -\frac{E\cdot b}{4} & 0 & \frac{E\cdot b}{12} & 0 \\ 0 & \frac{E\cdot b}{6} & \frac{E\cdot a}{6} & -\frac{E\cdot b}{6} & -\frac{E\cdot a}{6} & 0 \\ -\frac{E\cdot b}{4} & \frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(4\cdot a^2 + 11\cdot b^2)}{24\cdot b} & -\frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(b^2 - 4\cdot a^2)}{24\cdot b} & 0 \\ 0 & -\frac{E\cdot b}{6} & -\frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(2\cdot a^2 + b^2)}{6\cdot b} & \frac{E\cdot a}{6} & -\frac{E\cdot a^2}{3\cdot b} \\ \frac{E\cdot b}{12} & -\frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(b^2 - 4\cdot a^2)}{24\cdot b} & \frac{E\cdot a}{6} & \frac{E\cdot(4\cdot a^2 + 3\cdot b^2)}{24\cdot b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E\cdot a^2}{3\cdot b} & 0 & \frac{E\cdot a^2}{3\cdot b} \end{bmatrix} \end{array}$$

La matriz es igual a la matriz transpuesta, por lo tanto, la suma es igual de las columnas y filas.

Suma de 2da, 4ta y 6ta columnas.

$$K^{\langle 1\rangle}+K^{\langle 3\rangle}+K^{\langle 5\rangle} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E\cdot\left(2\cdot a^2+b^2\right)}{6\cdot b}-\frac{E\cdot b}{6}-\frac{E\cdot a^2}{3\cdot b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suma de 1ra, 3ra y 5ta columnas.

$$K^{\langle 0\rangle}+K^{\langle 2\rangle}+K^{\langle 4\rangle} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{E\cdot b}{3} \\ 0 \\ \frac{E\cdot\left(4\cdot a^2+11\cdot b^2\right)}{24\cdot b}-\frac{E\cdot b}{4}+\frac{E\cdot\left(b^2-4\cdot a^2\right)}{24\cdot b} \\ 0 \\ \frac{E\cdot b}{12}+\frac{E\cdot\left(4\cdot a^2+3\cdot b^2\right)}{24\cdot b}+\frac{E\cdot\left(b^2-4\cdot a^2\right)}{24\cdot b} \\ 0 \end{bmatrix} \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{E\cdot b}{3} \\ 0 \\ \frac{E\cdot b}{4} \\ 0 \\ \frac{E\cdot b}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La sumatoria de estas columnas (2,4 y 6) da 0, ya que en la formulación de la matriz de rigidez (Figura 1)se realiza en función de r y no de z, siendo los ejes en que se encuentra el elemento (Figura 2), siendo el trabajo interno realizado en el eje z, no utilizado, en el caso de desplazamientos en el eje r columnas (1,3 y 5), no se anulan, es decir se toma en cuentan.

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{4A^2}\int_{\Omega^e} r \begin{bmatrix} z_{23} & 0 & z_{31} & 0 & z_{12} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 & r_{13} & 0 & r_{21} \\ 2A\,\zeta_1/r & 0 & 2A\,\zeta_2/r & 0 & 2A\,\zeta_3/r & 0 \\ r_{32} & z_{23} & r_{13} & z_{31} & r_{21} & z_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} & 0 \\ E_{14} & E_{24} & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{23} & 0 & z_{31} & 0 & z_{12} & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 & r_{13} & 0 & r_{21} \\ 2A\,\zeta_1/r & 0 & 2A\,\zeta_2/r & 0 & 2A\,\zeta_3/r & 0 \\ r_{32} & z_{23} & r_{13} & z_{31} & r_{21} & z_{12} \end{bmatrix} d\Omega.$$

Figura 1 Matriz de rigidez

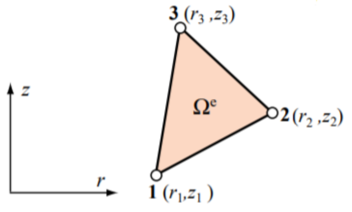

Figura 2 Coordenadas elemento triangular

3. Compute the consistent force vector $\mathbf{f}_e$ for gravity forces $\mathbf{b} = [0, -g]^T$.

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \, \mathbf{b} \, r \, d\Omega$$

$$fe := \int r \cdot \begin{pmatrix} \xi1 & 0 & \xi2 & 0 & \xi3 & 0 \\ 0 & \xi1 & 0 & \xi2 & 0 & \xi3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} d\Omega \quad \rightarrow \quad \int \begin{bmatrix} 0 \\ -g\cdot\xi1\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi2\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi3\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \end{bmatrix} d\Omega$$

$$r := r1\cdot\xi1 + r2\cdot\xi2 + r3\cdot\xi3 \rightarrow \quad \rightarrow a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3$$

Regla de Gauss de punto intermedio:

$$\frac{1}{A}\int_{\Omega^e} F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\, d\Omega \approx \tfrac{1}{3}F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0) + \tfrac{1}{3}F(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{3}F(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}).$$

Calculo de $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$\begin{pmatrix} \xi1 \\ \xi2 \\ \xi3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -g\cdot\xi1\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi2\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi3\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a\cdot g}{4} \\ 0 \\ -\frac{a\cdot g}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculo de $F\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{pmatrix} \xi1 \\ \xi2 \\ \xi3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -g\cdot\xi1\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi2\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi3\cdot(a\cdot\xi2 + a\cdot\xi3) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a\cdot g}{2} \\ 0 \\ -\frac{a\cdot g}{2} \end{pmatrix}$$

Calculo de $F\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{pmatrix} \xi 1 \\ \xi 2 \\ \xi 3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -g\cdot\xi 1\cdot(a\cdot\xi 2 + a\cdot\xi 3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi 2\cdot(a\cdot\xi 2 + a\cdot\xi 3) \\ 0 \\ -g\cdot\xi 3\cdot(a\cdot\xi 2 + a\cdot\xi 3) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a\cdot g}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a\cdot g}{4} \end{pmatrix}$$

Sumatoria de $\left(\frac{1}{3} * F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) + \frac{1}{3} * F\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} * F\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right) * A$

$$\begin{pmatrix} fr1 \\ fz1 \\ fr2 \\ fz2 \\ fr3 \\ fz3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A\cdot a\cdot g}{6} \\ 0 \\ -\frac{A\cdot a\cdot g}{4} \\ 0 \\ -\frac{A\cdot a\cdot g}{4} \end{pmatrix}$$